Πx 1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_A z\cdot e^{x+y}\, d(x,y,z) \quad , \quad A=[0,1]^3 .$$

ΛΥΣΗ

$$\int_A z\cdot e^{x+y}\, d(x,y,z) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 z\cdot e^{x+y}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \dots = \frac{1}{2}(e-1)^2$$

Πx 2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_W x^2\cdot \cos z\, d(x,y,z) \quad ,$$

W: Το χωρίο που περικλείεται από τα επίπεδα $z=0$, $z=\pi$, $y=0$, $y=1$, $x=0$, $x+y=1$

ΛΥΣΗ

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le \pi \ ,\ 0\le y\le 1 \ ,\ 0\le x\le 1-y\}$$

Τότε $\int_W x^2\cdot \cos x\, d(x,y,z) =$

$$= \int_0^\pi \int_\Delta x^2\cdot \cos z\, d(x,y)\, dz \Rightarrow$$

με $\Delta=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1 \ \& \ 0\le x\le 1-y\}$

$$\Rightarrow \int_0^\pi\left(\int_0^1\left(\int_0^{1-y}\left(x^2\cos z\, dx\right) dy\right) dz\right) =$$

$$= \int_0^\pi\left(\int_0^1\left(\int_0^{1-y}(x^2\cdot \cos z)\, dx\right) dy\right) dz =$$

$$= \int_0^\pi\int_0^1 \cos z\left(\int_0^{1-y} x^2\, dx\right) dy\, dz =$$

$$= \int_0^\pi \cos z\left(\int_0^1 \frac{(1-y^3)}{3}\, dy\right) dz = \dots$$

Πχ 3

Να βρεθεί ο όγκος του χωρίου που περικλείεται από τις $z = x^2+3y^2$ και $z = 9-x^2$

Μας ζητάται $V(B) = \int_B 1 \, d(x,y,z)$

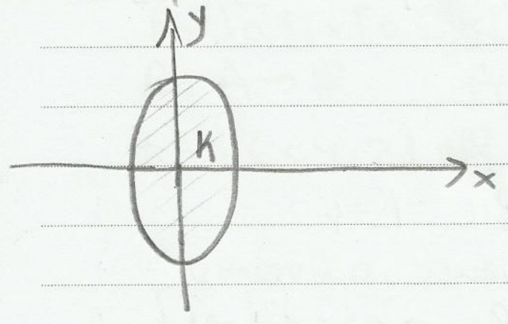
$$B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+3y^2 \le z \le 9-x^2\}$$

$$\int_B 1\, d(x,y,z) = \int_K \left(\int_{x^2+3y^2}^{9-x^2} 1\, dz\right) d(x,y)$$

Ζητημα: Πως θα βρουμε το K;
το συνολο K θα είναι "εκεί" που η κάτω συναρτηση "συναντάει" την πάνω συναρτηση (δηλ. $x^2+3y^2 = 9-x^2$)

$2x^2+3y^2 = 9$

Δηλ. εχουμε μια ελλειψη
άρα στο επίπεδο Oxy θα είναι



Αρα, $K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x^2+3y^2 \le 9\} =$

$$= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3} \text{ και } \underbrace{-\sqrt{\frac{9-3y^2}{2}}}_{\psi_1(y)} \le x \le \underbrace{\sqrt{\frac{9-3y^2}{2}}}_{\psi_2(y)}\Big\}$$

$$V(B) = \int_B 1\, d(x,y,z) = \int_K \left(\int_{x^2+3y^2}^{9-x^2} 1\, dz\right) d(x,y) =$$

$$= \int_K (9-x^2-x^2-3y^2)\, d(x,y) = \int_K (9-2x^2-3y^2)\, d(x,y)$$

$$\left(= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \cdot \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \cdot (9-2x^2-3y^2)\right) \leftarrow$$ Συμβολισμός από φυσικές επιστήμες

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} (9-2x^2-3y^2)\, dx \right) dy =$$

Αρτια (ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ)

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\int_{-\sqrt{\frac{9-3y^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{9-3y^2}{2}}} (9-2x^2-3y^2)\, dx \right) dy =$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(2 \cdot \int_{0}^{\sqrt{\frac{9-3y^2}{2}}} (9-2x^2-3y^2)\, dx \right) dy =$$

$$= 4 \int_{0}^{\sqrt{3}} \int_{0}^{\sqrt{\frac{9-3y^2}{2}}} (9-3y^2-2x^2)\, dx \Big) dy =$$

$$= 4 \int_{0}^{\sqrt{3}} \int_{0}^{\sqrt{\frac{9-3y^2}{2}}} \left(2 \frac{9-3y^2}{2} - 2x^2 \right) dx \Big) dy = \ldots$$

ΑΣΚΗΣΗ

Εστω $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le xy\}$

Να υπολογιστε τα ολοκληρωματα:

$$V(B) = \int_B x\, d(x,y,z), \quad \int_B 4\, d(x,y,z), \quad \int_B z\, d(x,y,z)$$

$$\int_B xy\, d(x,y,z).$$

ΛΥΣΗ

- $V(B) = \int_B 1\, d(x,y,z) = \int_{[0,1]\times[0,1]} \left(\int_0^{xy} 1\, dz \right) d(x,y)$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{xy} 1\, dz \right) dy \right) dx$$

Και τα υπόλοιπα ομοίως.